Un peu d'analyse asymptotique, un peu d'équadiffs (indications)

1 Sommes de Riemann

1) Partir d'une inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre 1 centrée en $x_{n,k}$, puis sommer.

2) Faire surgir la fonction $x \longmapsto x\ln(1+x)$.

2 Solutions bornées d'une équation de Sturm-Liouville

1) **a)** Exploiter à fond l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz.

b)

2) **a)**

b)

c)

3) **a)**

b)

4) **a)** Factoriser le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + 1$ et appliquer le lemme de décomposition des noyaux.

b)

5) Adapter le raisonnement de la question **4)** et s'intéresser à $\lim\limits_{k\to+\infty} f(kT)$ et $\lim\limits_{k\to-\infty} f(kT)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$.

3 Dérivation d'un développement asymptotique

1) **a)**

b) Revenir à la définition de la limite en partant du fait que $\dfrac{(1+\lambda)^\alpha - 1}{\lambda} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \alpha$ et $\dfrac{1-(1-\lambda)^\alpha}{\lambda} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \alpha$. Montrer d'abord que $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a < b$.

2) **a)**

b) Adapter le raisonnement de la question **1)b)**.